离散数学

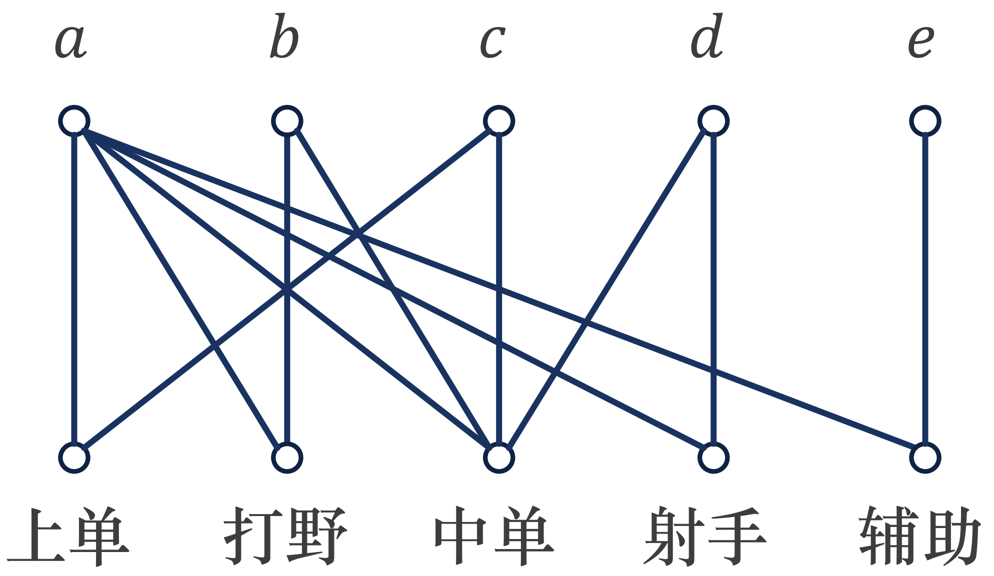
第九章: 二部图, 欧拉图, 哈密顿图

卢杨
厦门大学信息学院计算机科学与技术系
luyang@xmu.edu.cn

9.1 二部图

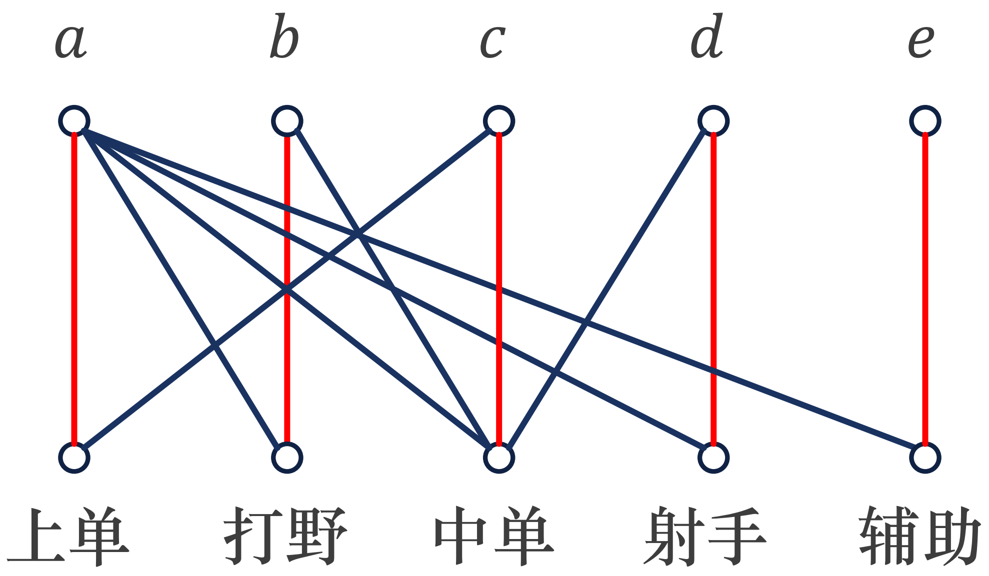
任务分配问题

- 今有5个王者玩家: a, b, c, d, e; 5个游戏角色位置: 上单, 打野, 中单, 射手, 辅助.
  - 玩家a是大神, 啥都会;
  - 玩家b只会打野和中单;
  - 玩家c只会上单和中单;
  - 玩家d只会中单和射手;
  - 玩家e是妹子, 只会辅助.
- 问如何分配玩家, 才能使每人都用自己擅长的位置, 且每个位置都有人玩?
- 只要以$V = \{a, b, c, d, e,$ 上单, 打野, 中单, 射手, 辅助$\}$为顶点集, 若某人会玩某位置, 就在某人与某位置之间连边, 得边集E, 构成无向图$G = \langle V, E \rangle$.



任务分配问题

- 由图显而易见
  - 让妹子e去玩辅助;
  - b, c, d分别玩打野, 中单, 射手;
  - 大神a挑剩下的, 玩上单.
- 在此图中, 玩家之间彼此不相邻, 角色位置之间也彼此不相邻.
- 像这样的图, 称它为二部图. 下面给出它的严格定义. 在本节我们只讨论无向图.



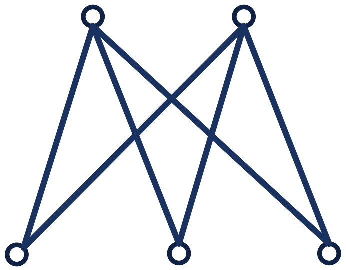
二部图

定义 9.1

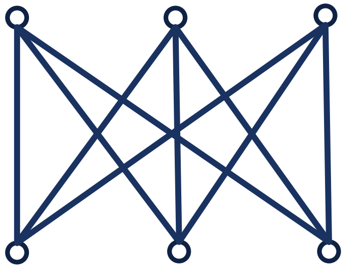
若能将无向图$G = \langle V, E \rangle$的顶点集划分成两个不相交的子集V_1和V_2($V_1 \cap V_2 = \emptyset$)，使得G中任何一条边的两个端点都一个属于V_1，另一个属于V_2，则称G为二部图，记为$G = \langle V_1, V_2, E \rangle$，$V_1, V_2$称为互补顶点子集.

又若V_1中任一顶点与V_2中任一顶点均有且仅有一条边相关联， 则称G为完全二部图. 若$|V_1| = r, |V_2| = s$, 则记完全二部图为$K_{r,s}$.

- 完全二部图的顶点数为$n = r + s$, 边数为$m = rs$.
- 零图是二部图.



$K_{2,3}$



$K_{3,3}$

二部图

定理 9.1

一个无向图$G = \langle V, E\rangle$是二部图当且仅当G中无奇数长度的回路.

证明 必要性

- 若G中无回路, 自然也没有奇数长度的回路, 结论显然成立.
- 若G中有回路, 设$C = v_1 v_2 \dots v_{l-1} v_l v_1$为$G$中任意一个回路, 不妨设$v_1 \in V_1$, 与$v_1$相邻的顶点$v_2$和$v_l$都属于$V_2$, 与$v_2$相邻的顶点$v_1$和$v_3$都属于$V_1$, 以此类推:

$$v_3, v_5, \dots v_{l-1}\text{均属于}V_1,$$

$$v_2, v_4, \dots v_l\text{均属于}V_2.$$

  于是l为偶数, 且回路C中的顶点数l等于其长度, 因而C是长度为偶数的回路.

- 由于C的任意性, 所以结论成立.

二部图

证明 充分性

- 若G是零图, 结论显然成立. 不妨设G是连通图, 否则可对它的每个连通分支进行讨论.
- 要证明G是二部图, 需要先在G中找到两个互补顶点子集.
  - 设v_0为G中任意一个顶点, 令V_1与V_2为与v_0的距离是偶数和奇数的顶点集合:

$$V_1 = \{v \mid v \in V(G) \wedge d(v_0, v)\text{为偶数}\},$$
$$V_2 = \{v \mid v \in V(G) \wedge d(v_0, v)\text{为奇数}\},$$

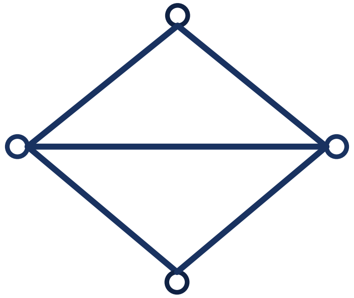
  易知$V_1 \cap V_2 = \emptyset$且$V_1 \cup V_2 = V(G)$.

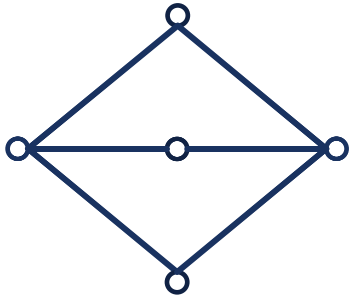
- 然后证明G中的任何一条边的两个端点一个属于V_1, 一个属于V_2, 即V_1中任二顶点不相邻, V_2中的任二顶点也不相邻. 使用反证法.
  - 假设存在$v_i, v_j \in V_1$ (V_2同理可证), 且v_i与v_j相邻, 则有边$e = (v_i, v_j) \in E$.
  - 设v_0到v_i和v_j的短程线分别为Γ_1和Γ_2, 则Γ_1和Γ_2的长度均为偶数.
  - 于是$\Gamma_1 \cup e \cup \Gamma_2$是$G$中长度为奇数的回路, 这与已知矛盾, 所以$V_1$中任二顶点不相邻, V_2中的任二顶点也不相邻, G是二部图.

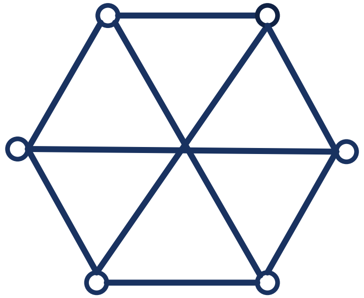
二部图

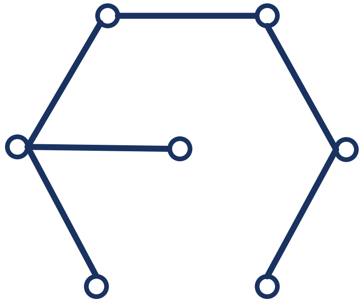
例 在以下图中, 哪些是二部图?

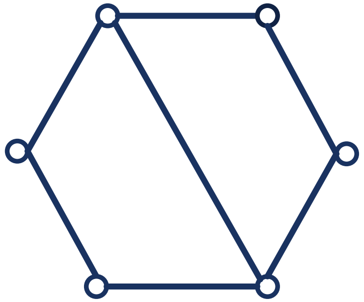
解 (1)和(6)不是二部图, 因为它们中均含有奇数长的回路. 其余的都是二部图.

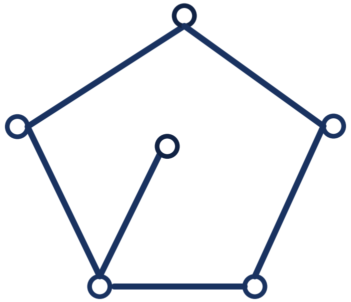

(1)


(2)


(3)

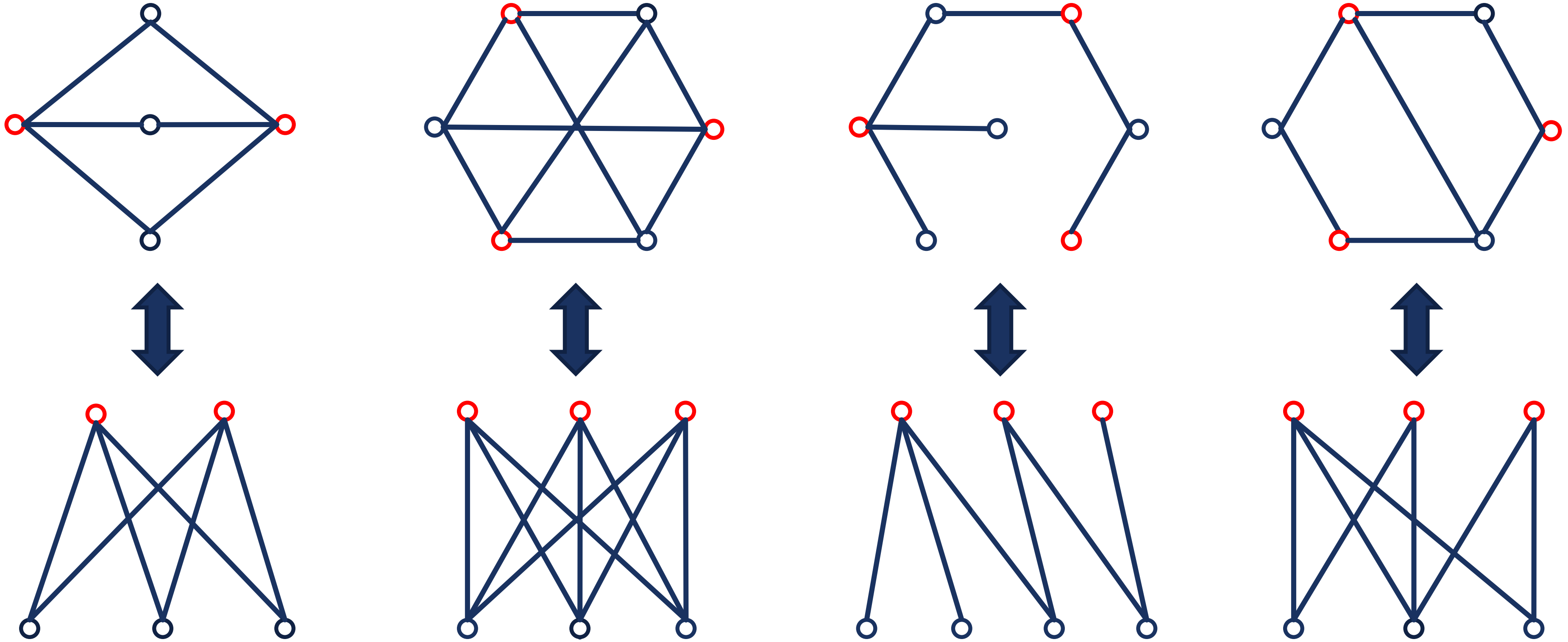

(4)


(5)


(6)

二部图

- 在画图时，通常将V_1放在图的上方，V_2放在图的下方：



匹配

- 在二部图中, 均可将V_1和V_2看成性质不同事物的集合.
- 比如V_1看成员工的集合, V_2看成是任务的集合.
- V_1中顶点v_i与V_2中顶点u_j相邻当且仅当v_i能承担任务u_j.
- 从二部图上容易看出满足某种要求的任务的分配方案, 这就是二部图的匹配问题.

定义 9.2

设无向图$G = \langle V, E \rangle$, $M \subseteq E$, 若M中的任意两条边均不相邻, 则称M为G中的一个匹配. 若在M中再加进任意一条边后不再是匹配, 则称M为G中的极大匹配. 称G中边数最多的匹配为最大匹配, 其边数称为边独立数或匹配数, 记作$\beta_1(G)$, 或简记为β_1.

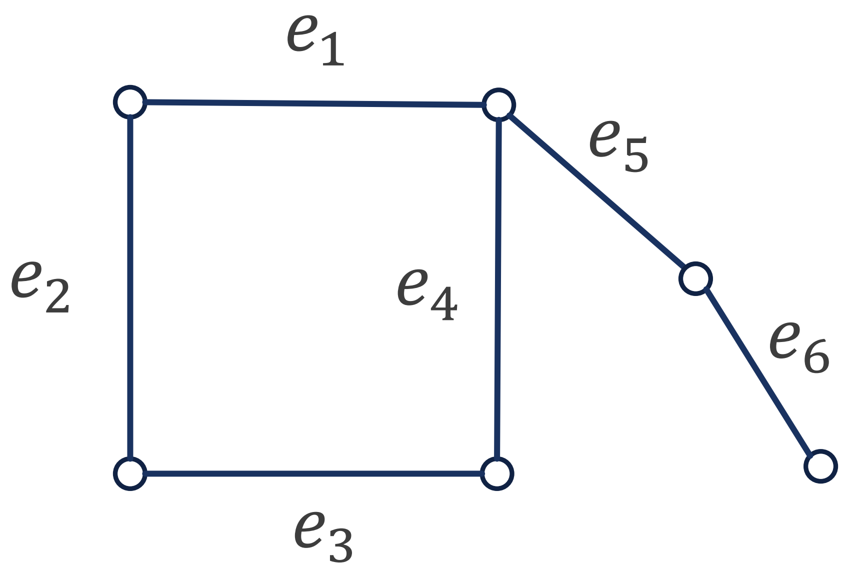
设M为G中的一个匹配, 与M中的边关联的顶点称为M的饱和点, 否则称为M的非饱和点. 若G中所有顶点都是M的饱和点, 则称M为G中的完美匹配.

匹配

例 该图中$E_1=\{e_3,e_5\}$，$E_2=\{e_1,e_3,e_6\}$，$E_3=\{e_2,e_4\}$均为G中的匹配.

其中E_1, E_2都是极大匹配, E_2又是最大匹配, 同时也是完美匹配, 其匹配数$\beta_1=3$.

而E_3不是极大匹配, 更不是最大匹配.



- 最大匹配必是极大匹配, 但是反之不然.
- 完美匹配必是最大匹配, 但是反之不然.

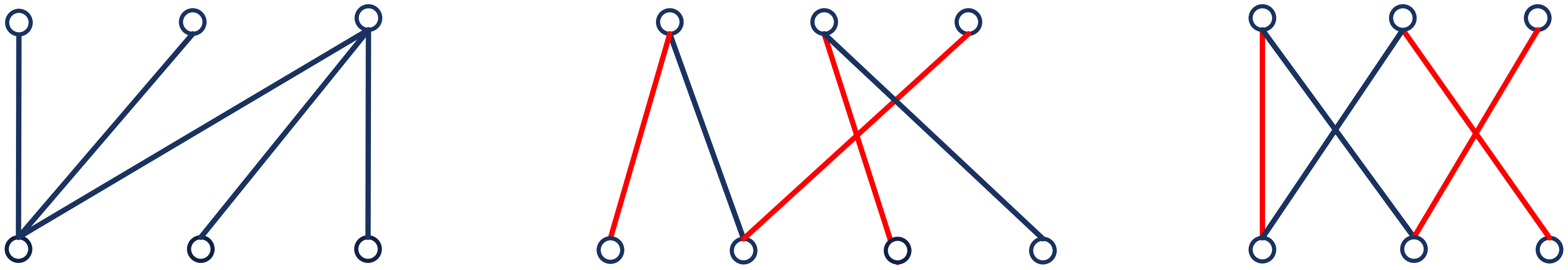
完备匹配

定义 9.3

设$G=\langle V_1,V_2,E\rangle$为二部图，且$|V_1|\le|V_2|$，$M$为$G$中的一个匹配，若$|M|=|V_1|$，则称$M$为$G$中的完备匹配.

- 当$|V_1|=|V_2|$时, G中的完备匹配是完美匹配.

例 (1)中无完备匹配，(2)与(3)中都存在完备匹配，而且(3)中的完备匹配也是完美匹配.



(1) (2) (3)

完备匹配

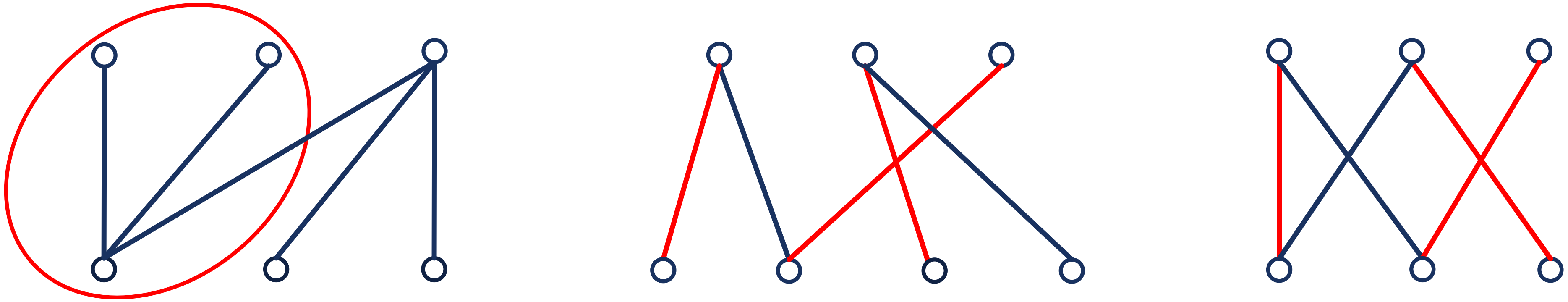
- 英国数学家Hall给出了二部图中存在完备匹配的充要条件，这就是著名的Hall定理，也称为Hall婚姻定理.

定理 9.2 (Hall定理)

设二部图$G = \langle V_1, V_2, E\rangle$中$|V_1| \le |V_2|$，$G$中存在完备匹配当且仅当$V_1$中任意$k$个顶点至少与$V_2$中的$k$个顶点相邻. $k = 1, 2, \ldots, |V_1|$.

- 其中的条件称为相异性条件.

例 (1)中存在两个顶点只与V_2中的一个顶点相邻, 因而不存在完备匹配. 而(2), (3)都满足相异性条件.



(1) (2) (3)

完备匹配

例 9.1 某中学有3个课外活动小组: 数学组, 计算机组和生物组. 今有赵, 钱, 孙, 李, 周5名学生. 已知:

(1) 赵, 钱为数学组成员, 赵, 孙, 李为计算机组成员, 孙, 李, 周为生物组成员;

(2) 赵为数学组成员, 钱, 孙, 李为计算机组成员, 钱, 孙, 李, 周为生物组成员;

(3) 赵为数学组和计算机组成员, 钱, 孙, 李, 周为生物组成员.

问在以上3种情况下, 能否分别选出3名不兼职的组长?

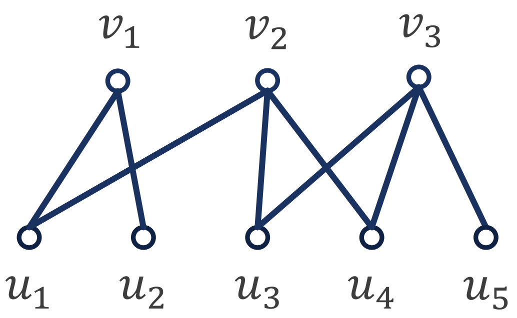
完备匹配

解 用v_1, v_2, v_3分别表示数学组, 计算机组和生物组. 用u_1, u_2, u_3, u_4, u_5分别表示赵, 钱, 孙, 李, 周. 若u_i是v_j成员, 就在u_i与v_j之间连边. 每种情况都对应一个二部图. 每种情况下能否选出不兼职组长, 就看它们所对应的二部图中是否存在完备匹配.

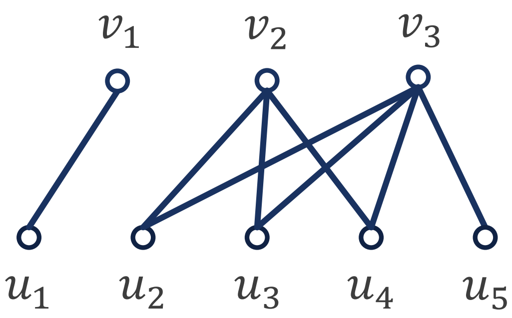
(1)满足相异性条件, 因而选出3位不兼职的组长, 而且有多种方案.

(2)也满足相异性条件, 因而也能选出3位不兼职的组长, 且也有不同的方案, 不过数学组组长必由赵担任.

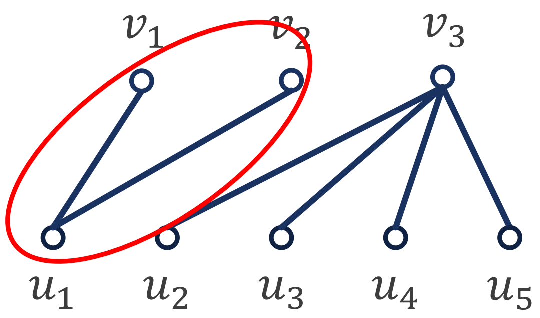
(3)就不同, 它不满足相异性条件, 不存在完备匹配.



(1)



(2)



(3)

课堂练习

7名计算机系毕业生A, B, C, D, E, F, G在寻找工作准备当码农迎接996福报, 某大厂公开招聘岗位有前端a, 运维c, 算法e, 后台p, 产品r, 设计s和架构t, 每个学生申请的岗位如下:

$$A\colon\ c, e; \qquad B\colon\ a, c, p, s, t; \qquad C\colon\ c, r; \qquad D\colon\ c, e, r;$$

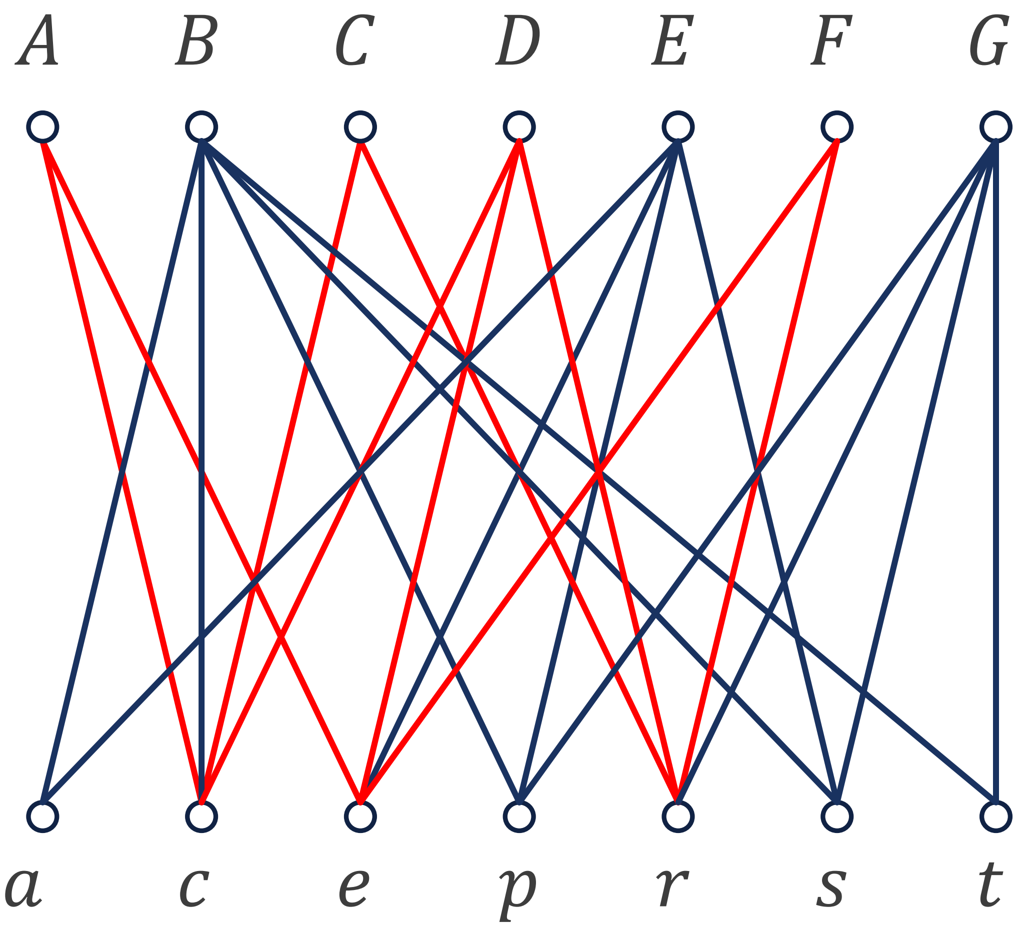
$$E\colon\ a, e, p, s; \qquad F\colon\ e, r; \qquad G\colon\ p, r, s, t.$$

如果每个岗位只招一个人, 每个学生是否都能得到其所申请的岗位?

课堂练习

解 建立二部图模型G，其中部集$V_1=\{A,B,C,D,E,F,G\}$为学生集合，另一部集$V_2=\{a,c,e,p,r,s,t\}$为岗位集合，若u申请了岗位w，则顶点u邻接于顶点w.

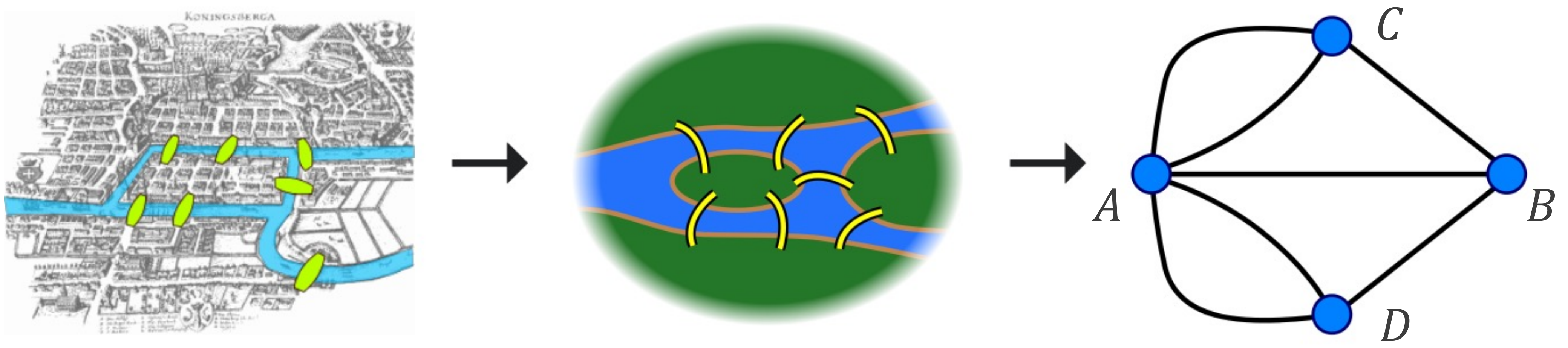
答案是不可能. 由于A，C，D，F仅仅申请了c，e，r这3个岗位集合的子集，不满足相异性条件.



9.2 欧拉图

哥尼斯堡七桥问题

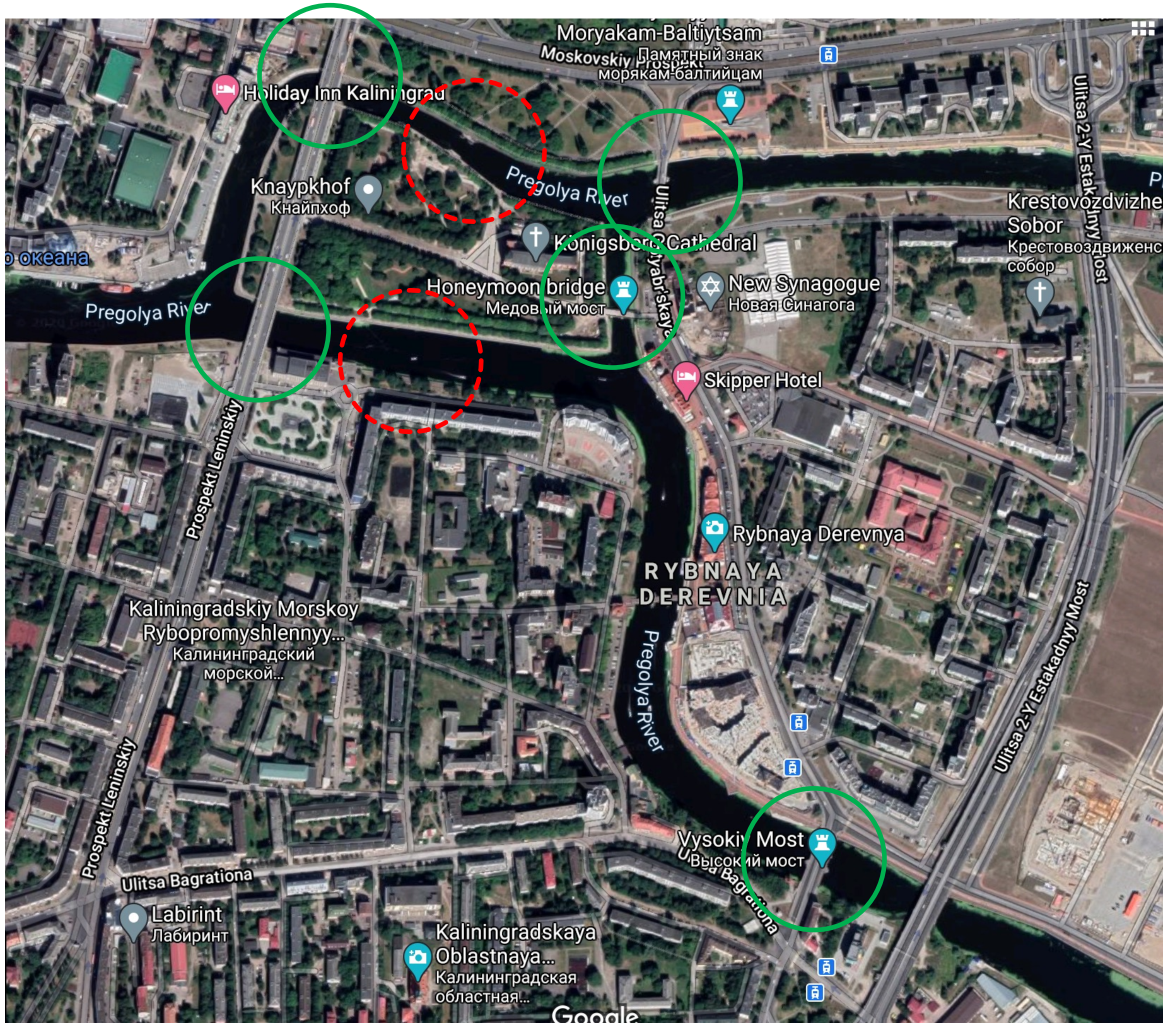
- 哥尼斯堡城七桥问题：　哥尼斯堡城中有一条横贯全市的普雷格尔河，河中有两个岛屿，两岸与岛屿由七座桥连接. 一个散步者怎样能不重复地走完七座桥?
- 欧拉把四块陆地设想为四个顶点，分别用A, B, C, D表示，而将桥画成相应的边. 于是问题转化为该图中是否存在经过每条边一次且仅一次的回路.
- 欧拉经过研究，终于找到解决这类问题的一个简便原则，可以鉴别一个图 (包括多重图) 能否一笔画，并对七桥问题给出了否定的结论.



Source: https://en.wikipedia.org/wiki/Seven_Bridges_of_K%C3%B6nigsberg

哥尼斯堡七桥问题

- 七桥问题的发源地当时(1736年)是东普鲁士哥尼斯堡，如今是俄罗斯加里宁格勒州.
- 非常遗憾，在二战期间两座桥被炸毁. 如今只剩下五座桥.



https://www.google.com.hk/maps/place/Kaliningrad,+Kaliningrad+Oblast,+Russia/@54.7033133,20.5073985,1413m/data=!3m1!1e3!4m5!3m4!1s0x46e33d8d4b7c21a9:0x5050960016126ed3!8m2!3d54.7104264!4d20.4522144?hl=en

欧拉图

定义 9.4

设$G = \langle V,E\rangle$是连通图 (无向图和有向图),

(1) G中经过每条边一次并且仅一次的通路称为欧拉通路.

(2) G中经过每条边一次并且仅一次的回路称为欧拉回路.

(3) 具有欧拉回路的图称为欧拉图.

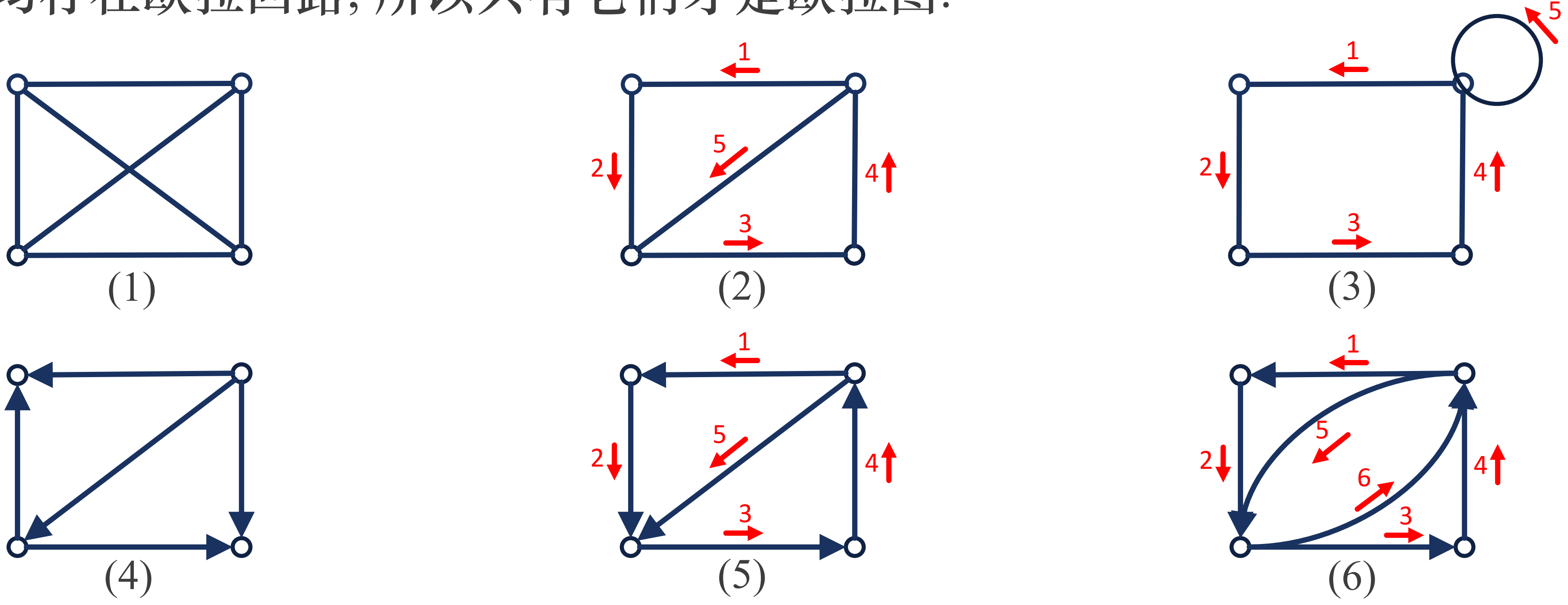
平凡图为欧拉图.

- 只有欧拉通路没有欧拉回路的图不是欧拉图.
- 定义包含多重图在内, 即欧拉回路中允许平行边出现.
- 欧拉通路是经过所有边的简单通路, 欧拉回路是经过所有边的简单回路.
  - 简单通路和简单回路意味着可以经过相同的顶点.

欧拉图

例 以下哪些图有欧拉通路或者有欧拉回路呢?

- (1)和(4)既无欧拉回路, 也无欧拉通路.
- (2)和(5)只有欧拉通路, 没有欧拉回路.
- (3)和(6)均存在欧拉回路, 所以只有它们才是欧拉图.



欧拉图

定理9.3

设G为无向图,

(1) G是欧拉图当且仅当G是连通的且不存在度数为奇数的顶点.

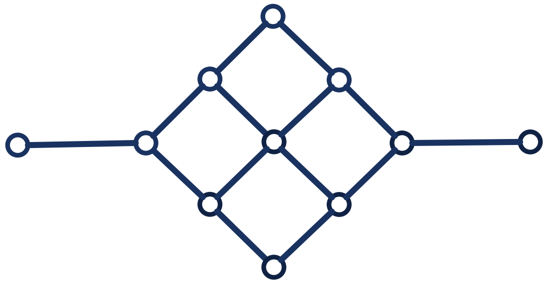
(2) G有欧拉通路, 但无欧拉回路, 当且仅当G是连通的且恰好有两个顶点的度数是奇数.

- 定理的必要性是显然的.
  - 当L是G的一条欧拉回路时, L每次经过一个顶点时都是一进一出, 顶点获得2度. 并且所有的顶点和边都在回路上, 因此所有顶点的度数都是2的倍数即偶数.
  - 当L是G的一条欧拉通路（非欧拉回路）时，同理L上除两个端点外的顶点的度数都是偶数, 而只有两个端点的度数是奇数.
- 现在再来看哥尼斯堡七桥问题，4个顶点的度数都是奇数，即不存在欧拉通路，更不存在欧拉回路.

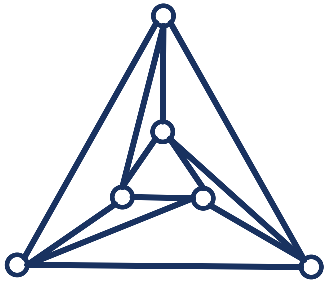
欧拉图

例 通过定理9.3来判断以下哪些图有欧拉通路和欧拉回路?

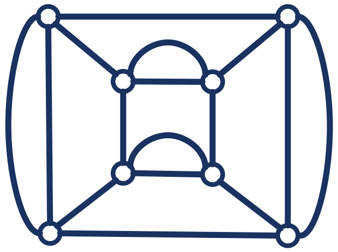
- (4)和(5)各有两个顶点的度数是奇数, 因而它们有欧拉通路, 无欧拉回路.
- (1)和(6)中度数为奇数的顶点个数都超过了2, 因此不存在欧拉通路和欧拉回路.
- (2)和(3)中所有顶点的度数都是偶数, 因此它们是欧拉图.



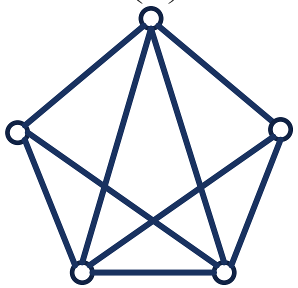
(1)



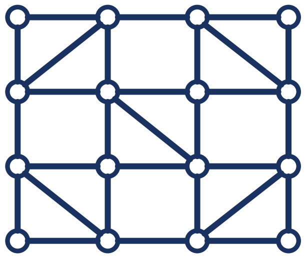
(2)



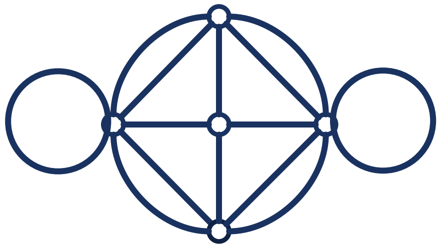
(3)



(4)



(5)



(6)

欧拉图

定理 9.4

设D为有向图,

(1) D是欧拉图当且仅当D是连通的且所有顶点的入度等于出度.

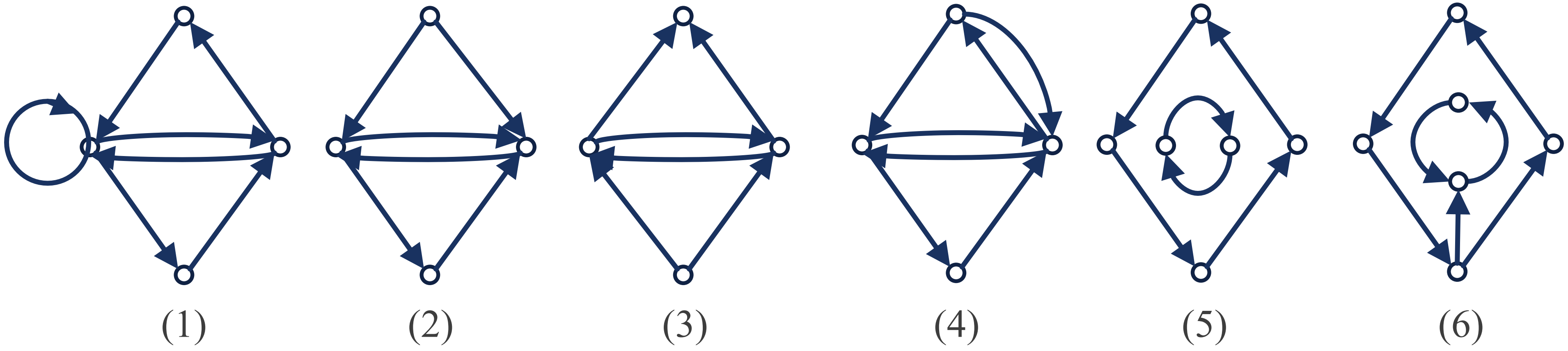
(2) D有欧拉通路, 但无欧拉回路, 当且仅当D是连通的且一个顶点的入度比出度大1, 另一个顶点的入度比出度小1, 其余顶点的入度均等于出度.

定理的必要性与无向图类似, 是显然的.

欧拉图

例 通过定理9.4来判断以下哪些图有欧拉通路和欧拉回路?

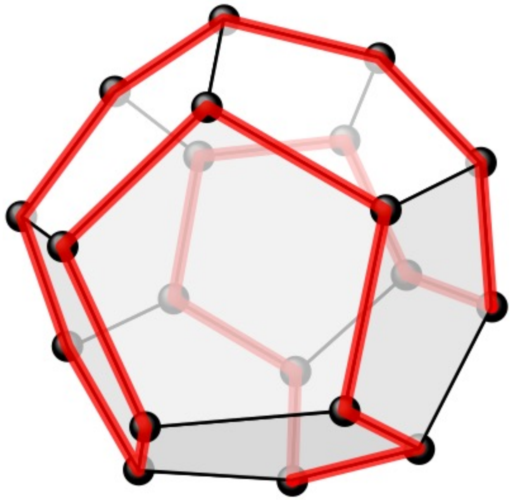
- (1)中每个顶点的出度等于入度, 因此是欧拉图.
- (2)和(3)有一个出度2入度0的顶点, 因此它们都不存在欧拉通路.
- (4)中存在一个出度2入度1的顶点，和一个入度3出度2的顶点；(6)中存在一个出度2入度1的顶点，和一个入度2出度1的顶点. (4)和(6)的其他顶点出度和入度都相等, 因此它们存在欧拉通路.
- (5)不是连通图.

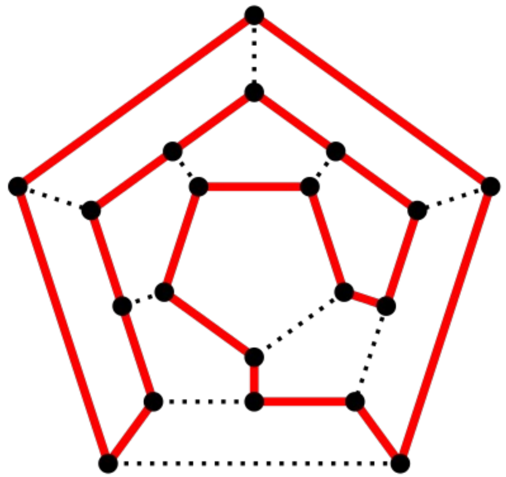


9.3 哈密顿图

周游世界问题

- 1859年爱尔兰数学家哈密顿设计了一个在正十二面体上的游戏: 周游世界问题.
- 他将20个顶点看作20个城市, 每一条棱看作一条公路, 要求从一个城市出发, 沿着公路经过每一个城市一次且仅一次, 最后回到出发的城市.
- 可以把正十二面体的一个面撕开，平摊到平面上成为一个图，问题就变成在该图中找一条经过每一个顶点恰好一次的回路, 这样的回路现在称作哈密顿回路.





Source: https://en.wikipedia.org/wiki/Hamiltonian_path

哈密顿图

定义 9.5

设$G = \langle V, E \rangle$是连通图 (无向图和有向图),

(1) G中经过每个顶点一次并且仅一次的通路称为哈密顿通路.

(2) G中经过每个顶点一次并且仅一次的回路称为哈密顿回路.

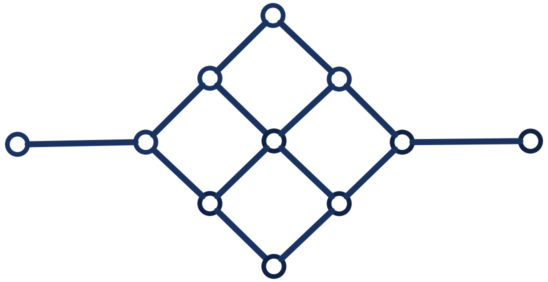
(3) 具有哈密顿回路的图称为哈密顿图.

- 欧拉回路和哈密顿回路的区别在于:
  - 欧拉回路经过所有的边一次, 哈密顿回路经过所有的顶点一次.
  - 欧拉回路是简单回路, 哈密顿回路是初级回路.
- 欧拉图和哈密顿图之间几乎没有什么联系, 有的图只是欧拉图, 有的图只是哈密顿图, 有的图既是欧拉图又是哈密顿图, 有的图则两者皆不是.

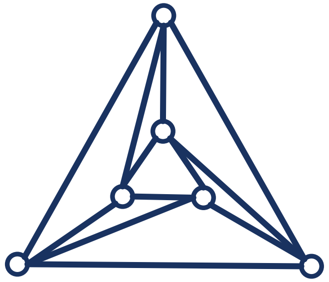
哈密顿图

例 以下哪些图有哈密顿通路和哈密顿回路?

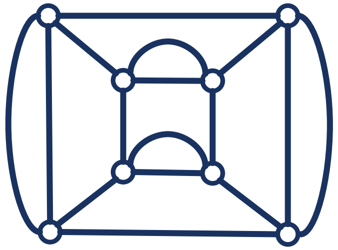
- 只有(1)没有哈密顿回路, 它只有哈密顿通路.
- 其余的图均有哈密顿回路.



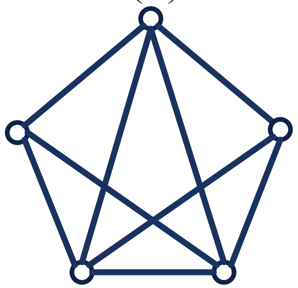
(1)



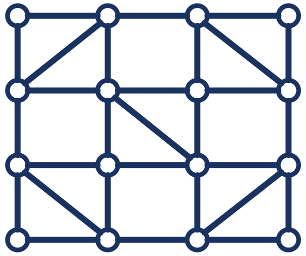
(2)



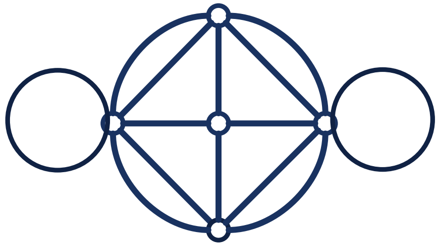
(3)



(4)



(5)

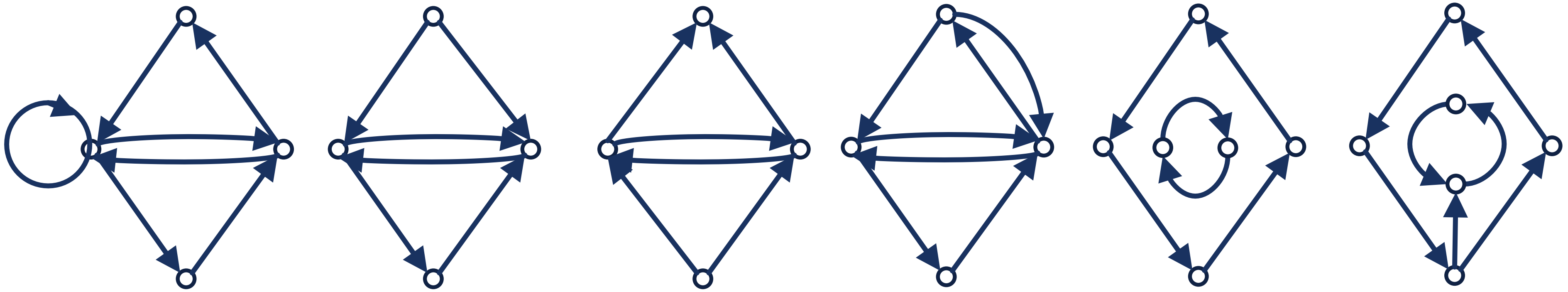


(6)

哈密顿图

例 以下哪些图有哈密顿通路和哈密顿回路?

- 除了(5)以外, 都有哈密顿通路.
- (2), (3)和(6)只有哈密顿通路, 没有哈密顿回路.
- (1)和(4)有哈密顿回路, 它们是哈密顿图.



(1) (2) (3) (4) (5) (6)

哈密顿图

- 虽然欧拉回路和哈密顿回路都是遍历图， 定义看起来相似，但两者判定的困难程度却天差地别.
- 欧拉图已"彻底和漂亮"地解决了（给出了判定的充要条件）. 到目前为止，还没有找到一个简明可行的条件作为一个图是否为哈密顿图的简单充要条件. 确定图有哈密顿回路是非常困难的.
- 判断一个图是否是哈密顿图是一个NP完全问题. 它是可解的，我们可以通过回溯算法来解决该问题.
- 目前，只能找到一些判定哈密顿回路存在性的充分条件和必要条件. 尚未找到判定的充要条件.

哈密顿图

定理 9.5 (哈密顿图的必要条件)

设无向图$G=\langle V,E\rangle$是哈密顿图, V_1是V的任意非空真子集, 则

$$p(G-V_1)\le |V_1|.$$

证明 因为G是哈密顿图, 所以G中存在哈密顿回路.

设C为G中任意一条哈密顿回路，当V_1中顶点在C中均不相邻时， $p(C-V_1)=|V_1|$最大．其余情况下均有$p(C-V_1)<|V_1|$, 所以有

$$p(C-V_1)\le |V_1|.$$

而$C-V_1$是$G-V_1$的子图，因此$G-V_1$的连通分支数不会超过$C-V_1$的连通分支数，故

$$p(G-V_1)\le p(C-V_1)\le |V_1|.$$

该定理给出的条件是**必要的**. 因此对一个图来说, 如果不满足这个必要条件, 它一定不是哈密顿图. 但是满足这个条件的图不一定是哈密顿图.

哈密顿图

推论

有割点的图一定不是哈密顿图.

证明 当$V_1=\{v\}$为割点时，$p(G-\{v\})>|\{v\}|=1$, 与定理9.5的必要性矛盾.

推论

设无向图$G=\langle V,E\rangle$有哈密顿通路, V_1是V的任意非空真子集, 则

$$p(G-V_1)\leq|V_1|+1.$$

证明 设P是G的一条哈密顿通路，两个端点为u和v. 在u和v之间加一条边$e=(u,v)$, 所得到的图记作G', 显然G'是哈密顿图.

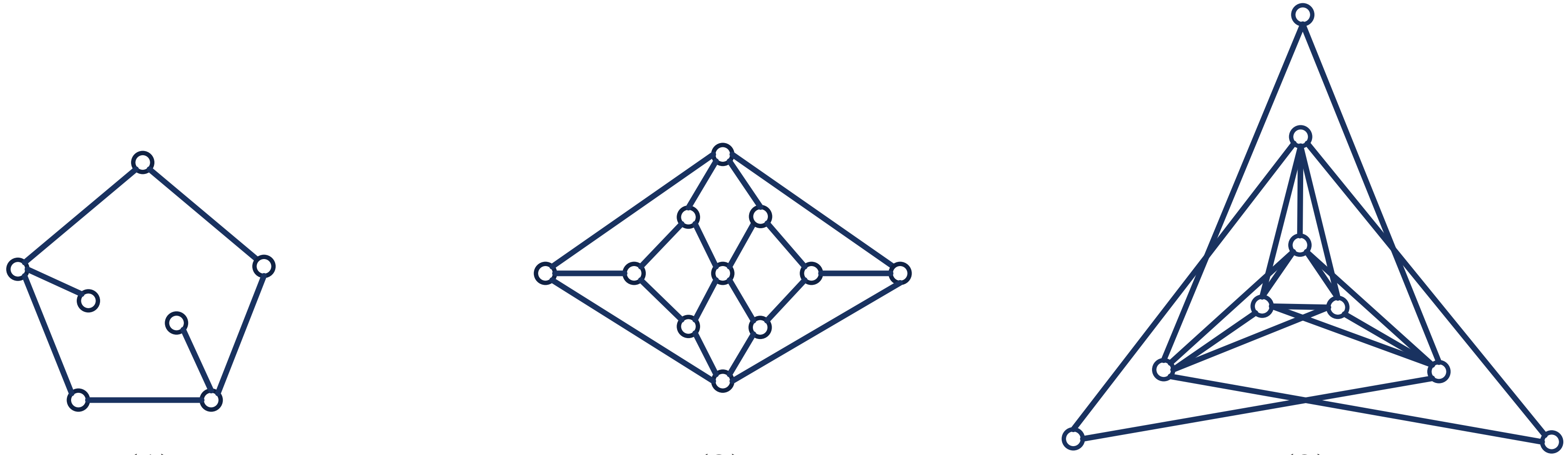
由定理9.5可得

$$p(G-V_1)=p(G'-V_1-e)\leq p(G'-V_1)+1\leq|V_1|+1.$$

哈密顿图

例 以下哪些图有哈密顿通路和哈密顿回路?

- (1)中存在割点, 必然不是哈密顿图, 将两个割点的集合删去后, 得到4个连通分支, 所以也不存在哈密顿通路.
- (2)中删除这5个顶点的集合后得到6个连通分支, 所以也不是哈密顿图, 但是存在哈密顿通路.
- (3)中删除这3个顶点的集合后得到4个连通分支, 所以也不是哈密顿图, 但是存在哈密顿通路.



(1) (2) (3)

哈密顿图

定理 9.6 (哈密顿图的充分条件)

设G是$n(n \geq 3)$阶无向简单图, 若对于G中任意不相邻的顶点u, v, 均有

$$d(u) + d(v) \geq n - 1,$$

则G中存在哈密顿通路. 若

$$d(u) + d(v) \geq n,$$

则G为哈密顿图.

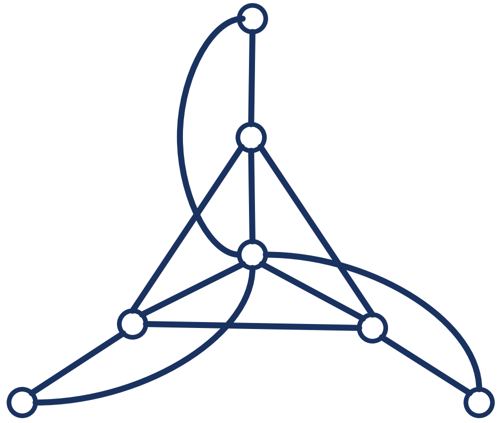
推论 设G是$n(n \geq 3)$阶无向简单图, $\delta(D) \geq n/2$, 则G为哈密顿图.

- 由推论可知，对于完全图K_n，当$n \geq 3$时为哈密顿图；完全二部图$K_{r,s}$，当$r = s \geq 2$时为哈密顿图.

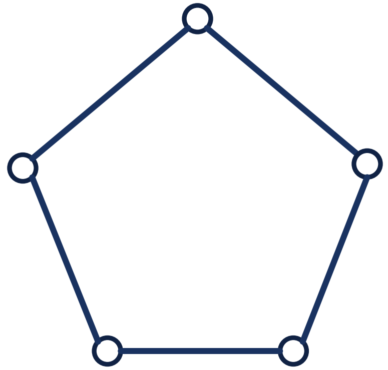
哈密顿图

例

- (1)满足定理9.5中的必要性条件“V_1是V的任意非空真子集，则$p(G-V_1) \le |V_1|$”, 但不是哈密顿图.
- (2)是哈密顿图，但是不满足定理9.6的推论1中的充分性条件“对于G中任意不相邻的顶点u, v, 均有$d(u)+d(v) \ge n$”.



(1)



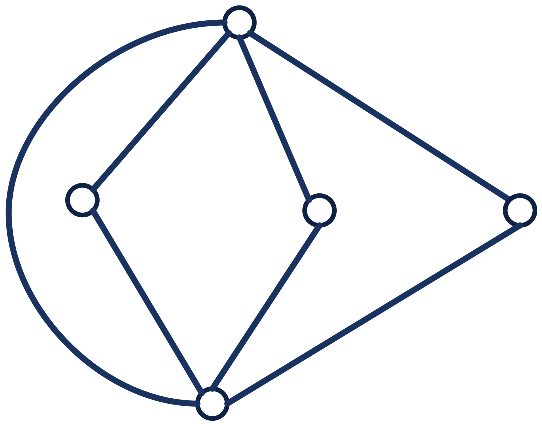
(2)

小结

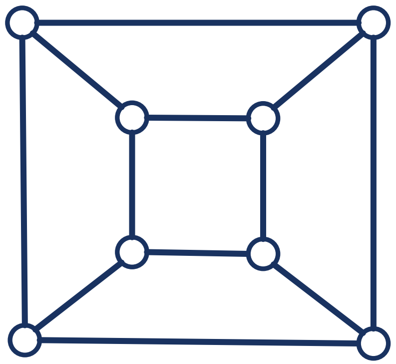
- 判断二部图: 是否有奇数长度回路.
- 判断二部图的完备匹配: 是否满足相异性条件.
- 判断欧拉图: 判断是否存在度数为奇数的顶点.
- 判断哈密顿图:
  - 必要条件: 若$p(G - V_1) > |V_1|$, 一定不是;
  - 充分条件: 若$d(u) + d(v) \geq n$, 一定是.

课堂练习

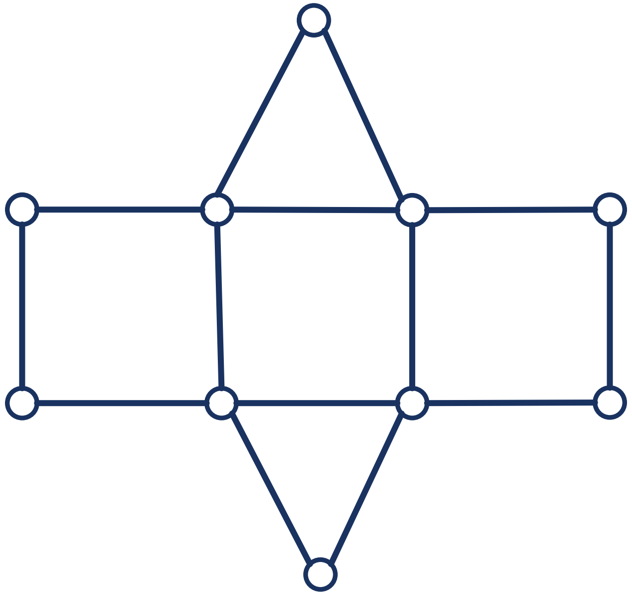
以下哪些图是二部图，欧拉图，哈密顿图？



(1)



(2)

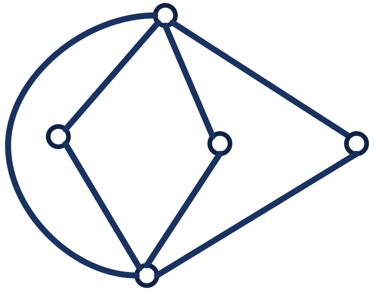


(3)

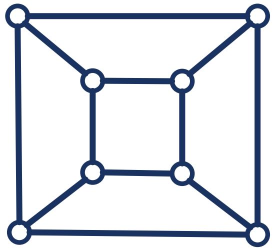
课堂练习

以下哪些图是二部图, 欧拉图, 哈密顿图?

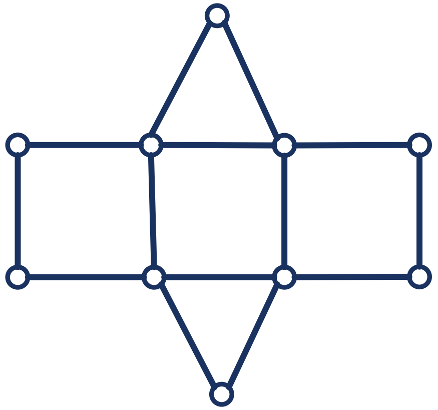
- (1)(3)中存在奇数长度的回路, 因此不是二部图. (2)是二部图.
- (1)(3)连通且无顶点的度数是奇数，因此都是欧拉图．(2)存在度数是奇数的顶点，因此不是欧拉图.
- (2)(3)中都可以找到哈密顿回路，因此他们是哈密顿图．(1)中存在删除2个顶点得到3个连通分支, 因此不是哈密顿图.



(1)



(2)



(3)

作业

本章作业和下章一起做

谢谢

有问题欢迎随时跟我讨论